美和學報　第三十二卷第一期　民國 **102** 年
Journal of Meiho University, Vol. 32 No.1, pp. 41-54

兩種有理函數的微分問題

余啟輝*

摘要

本篇論文主要是研究兩種有理函數的微分問題。我們利用 Leibniz 微分法則可以得到這兩種有理函數任意階導函數的閉合型式解，因此大大降低了求解它們高階微分值的困難度。此外，我們舉出兩個有理函數的例子實際的求出它們的任意階導函數的閉合型式解以及一些它們的高階微分值。另一方面，我們利用數學軟體 Maple 計算出這些高階微分值以及它們解的近似值。

關鍵詞：有理函數、Leibniz微分法則、閉合型式解、Maple

*南榮技術學院通識教育中心助理教授

壹、前言

在微積分課程裡，求函數 $f(x)$ 在 $x=c$ 的 n 階微分值(n-th order derivative value) $f^{(n)}(c)$ (其中 n 為正整數)，一般而言需要經過兩道手續。首先必須求出函數 $f(x)$ 的 n 階導函數 $f^{(n)}(x)$ ，其次再代入 $x=c$ 才能得到。這兩道手續在求高階微分值(即 n 比較大的情形)時會面臨計算越來越複雜的困境，所以要用手算的方式得到答案可以說是非常不容易的一件事，有關函數微分問題的研究可以參考(高木貞治，1984，第二章；Edwards & Penney, 1986, chap. 3；Euler, 1997；Grossman, 1992, chap. 2；Larson, Hostetler & Edwards, 2006, chap. 2；Marshall, 2000)。面對這一個難題，本篇論文研究兩種有理函數

$$f(x)=\frac{1}{[(ax+b)^2-c^2]^m}$$

以及

$$g(x)=\frac{1}{[(ax+b)^2+c^2]^m}$$

的微分問題，其中 a,b,c 為實數且 m 為正整數。我們利用 Leibniz 微分法則(Leibniz differential rule)可以求出這兩種函數任意階導函數的閉合型式解(closed forms)，也就是本文兩個主要的結果－定理 1 和定理 2，因此大大降低了求解這兩種有理函數高階微分值的困難度。另一方面，我們舉出兩個有理函數的例子實際的求出它們任意階導函數的閉合型式解以及計算一些它們的高階微分值。另一方面，我們利用數學軟體 Maple 算出這些高階微分值以及它們解的近似值。想要了解 Maple 在其他函數微分問題上的應用可以參考(余啟輝，2012a, 2012b, 2012c, 2012d, 2012e, 2012f, 2012g, 2012h, 2012i, 2012j, 2012k, 2012l)。

接著我們簡單的介紹本文所舉出的兩個有理函數的例子，首先例題 1 我們研究有理函數 $f(x)=\dfrac{1}{(9x^2-48x+62)^{11}}$ 的微分問題，利用定理 1 可以求出 $f(x)$ 在 $x=-\dfrac{7}{4}$ 的 13 階微分值

$$f^{(13)}\left(-\frac{7}{4}\right)$$

$$=2\cdot(-3)^{13}\cdot\sum_{k=0}^{6}\binom{13}{k}\frac{[11]_{13-k}[11]_k\cdot\sum_{p=0}^{6-k}\binom{13-2k}{2p}2^p\left(-\frac{53}{4}\right)^{13-2k-2p}}{\left(\frac{2777}{16}\right)^{24-k}} \tag{1}$$

$$\cong 6.6516\times10^{-15}$$

以及 $f(x)$ 在 $x=\frac{10}{3}$ 的 8 階微分值

$$f^{(8)}\left(\frac{10}{3}\right)$$

$$=2\cdot(-3)^8\cdot\sum_{k=0}^{3}\binom{8}{k}\frac{[11]_{8-k}[11]_k\cdot\sum_{p=0}^{4-k}\binom{8-2k}{2p}2^p\cdot 2^{8-2k-2p}}{2^{19-k}}$$

$$+(-3)^8\cdot\binom{8}{4}([11]_4)^2\cdot\frac{1}{2^{15}} \tag{2}$$

$\cong 9.44388\times 10^{11}$ 。

其次例題 2 我們探討有理函數 $g(x)=\frac{1}{(4x^2+4x+2)^7}$ 的微分問題，利用定理 2 可以得到 $g(x)$ 在 $x=\frac{1}{2}$ 的 10 階微分值

$$g^{(10)}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$=2048\cdot\sum_{k=0}^{4}\binom{10}{k}[7]_{10-k}[7]_k\frac{\sum_{p=0}^{5-k}\binom{10-2k}{2p}(-1)^p\cdot 2^{10-2k-2p}}{5^{17-k}}$$

$$+1024\cdot\binom{10}{5}([7]_5)^2\cdot\frac{1}{5^{12}} \tag{3}$$

$\cong 2.2506\times 10^6$

以及 $g(x)$ 在 $x=-\sqrt{3}$ 的 15 階微分值

$$g^{(15)}(-\sqrt{3})$$

$$= -65536 \cdot \sum_{k=0}^{7} \binom{15}{k} [7]_{15-k} [7]_k \frac{\sum_{p=0}^{7-k} \binom{15-2k}{2p} (-1)^p (-2\sqrt{3}+1)^{15-2k-2p}}{(14-4\sqrt{3})^{22-k}} \tag{4}$$

$\cong 5.3637 \times 10^{10}$ 。

貳、主要的理論

首先我們介紹本文用到的一些符號：

符號：(i)虛數 $i = \sqrt{-1}$ 。

(ii)函數 $f(x)$ 的 n 階導函數記作 $f^{(n)}(x)$ ，其中 n 為正整數。

(iii)設 t 為實數且 q 為正整數，定義 $(t)_q = t(t-1)\cdots(t-q+1)$;而 $(t)_0 = 1$ 。

(iv)設 c 為實數且 k 為正整數，定義 $[c]_k = c(c+1)\cdots(c+k-1)$;而 $[c]_0 = 1$ 。

(v)設 r 為實數，$\lfloor r \rfloor$ 代表小於或等於 r 的最大整數。

接著介紹本文用到的一個重要性質，我們可以參考 (高木貞治，1984，68 頁)：

Leibniz 微分法則：設 n 為正整數且 $u(x)$ 和 $v(x)$ 都是對 x 可以 n 次微分的函數，則 $u(x)$ 和 $v(x)$ 兩個函數相乘的 n 次微分 $(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(n-k)} v^{(k)}$ ，其中 $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$ 對所有 $k \geq 1$ ；而 $\binom{n}{0} = 1$ 。

以下是本文第一個主要的結果，我們求出某種有理函數任意階導函數的閉合型式解：

定理 1：設 a,b,c 為實數， m,n 為正整數且有理函數 $f(x) = \frac{1}{[(ax+b)^2 - c^2]^m}$ 的定義域為 $\{x \in R \mid ax + b \neq \pm c\}$。則 $f(x)$ 的 n 階導函數

$f^{(n)}(x)$

$$= 2 \cdot (-a)^n \cdot \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor} \binom{n}{k} \frac{[m]_{n-k} [m]_k \cdot \sum_{p=0}^{\left\lfloor \frac{n-2k}{2} \right\rfloor} \binom{n-2k}{2p} c^{2p} \cdot (ax+b)^{n-2k-2p}}{[(ax+b)^2 - c^2]^{m+n-k}}$$

$$+(-a)^n \cdot \frac{1+(-1)^n}{2} \cdot \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}([m]_{\lfloor n/2 \rfloor})^2 \cdot \frac{1}{[(ax+b)^2-c^2]^{m+\lfloor n/2 \rfloor}}$$

(5)

，對所有 x 滿足 $ax+b \neq \pm c$ 。

證明：因為 $f(x)=\frac{1}{[(ax+b)+c]^m}\cdot\frac{1}{[(ax+b)-c]^m}$ ，利用 Leibniz 微分法則得到 $f(x)$ 的任意 n 階導函數

$$f^{(n)}(x)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left[\frac{1}{[(ax+b)+c]^m}\right]^{(n-k)}\left[\frac{1}{[(ax+b)-c]^m}\right]^{(k)}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{a^{n-k}\cdot(-m)_{n-k}}{[(ax+b)+c]^{m+n-k}}\cdot\frac{a^k\cdot(-m)_k}{[(ax+b)-c]^{m+k}}$$

$$=(-a)^n\cdot\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{[m]_{n-k}[m]_k}{[(ax+b)+c]^{m+n-k}\cdot[(ax+b)-c]^{m+k}}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot(-a)^n\cdot\left\{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{[m]_{n-k}[m]_k}{[(ax+b)+c]^{m+n-k}\cdot[(ax+b)-c]^{m+k}}\right.$$

$$\left.+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{[m]_{n-k}[m]_k}{[(ax+b)-c]^{m+n-k}[(ax+b)+c]^{m+k}}\right\} \quad \text{(利用對稱性)}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot(-a)^n\cdot\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{[m]_{n-k}[m]_k\cdot\left([(ax+b)+c]^{n-2k}+[(ax+b)-c]^{n-2k}\right)}{[(ax+b)^2-c^2]^{m+n-k}}$$

$$=(-a)^n\cdot\sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor}\binom{n}{k}\frac{[m]_{n-k}[m]_k\cdot\left([(ax+b)+c]^{n-2k}+[(ax+b)-c]^{n-2k}\right)}{[(ax+b)^2-c^2]^{m+n-k}}$$

$$+(-a)^n\cdot\frac{1+(-1)^n}{2}\cdot\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}([m]_{\lfloor n/2 \rfloor})^2\cdot\frac{1}{[(ax+b)^2-c^2]^{m+\lfloor n/2 \rfloor}}$$

$$= 2\cdot(-a)^n\cdot\sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor}\binom{n}{k}\frac{[m]_{n-k}[m]_k\cdot\sum_{p=0}^{\left\lfloor\frac{n-2k}{2}\right\rfloor}\binom{n-2k}{2p}c^{2p}\cdot(ax+b)^{n-2k-2p}}{[(ax+b)^2-c^2]^{m+n-k}}$$

$$+(-a)^n\cdot\frac{1+(-1)^n}{2}\cdot\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}([m]_{\lfloor n/2\rfloor})^2\cdot\frac{1}{[(ax+b)^2-c^2]^{m+\lfloor n/2\rfloor}}$$

，對所有 x 滿足 $ax+b\neq\pm c$ ■

將定理 1 中的 c 換成 ic ，我們立刻得到另外一種有理函數任意階導函數的閉合型式解：

定理 2： 和定理 1 相同的假設且有理函數 $g(x)=\dfrac{1}{[(ax+b)^2+c^2]^m}$ 的定義域為 $\{x\in R\,|\,(ax+b)^2+c^2\neq 0\}$。則 $g(x)$ 的 n 階導函數

$g^{(n)}(x)$

$$= 2\cdot(-a)^n\cdot\sum_{k=0}^{\left\lfloor\frac{n-1}{2}\right\rfloor}\binom{n}{k}[m]_{n-k}[m]_k\frac{\sum_{p=0}^{\left\lfloor\frac{n-2k}{2}\right\rfloor}\binom{n-2k}{2p}(-c^2)^p(ax+b)^{n-2k-2p}}{[(ax+b)^2+c^2]^{m+n-k}}$$

$$+(-a)^n\cdot\frac{1+(-1)^n}{2}\cdot\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}([m]_{\lfloor n/2\rfloor})^2\cdot\frac{1}{[(ax+b)^2+c^2]^{m+\lfloor n/2\rfloor}}$$

(6)

，對所有 x 滿足 $(ax+b)^2+c^2\neq 0$ 。

參、例子說明

以下針對本文所探討的兩種有理函數的微分問題，舉出兩個例子實際的利用定理 1 和定理 2 求出這些有理函數任意階導函數的閉合型式解以及一些它們的高階微分值。同時，我們利用 Maple 計算出這些高階微分值以及它們解的近似值。

例題 1：設有理函數 $f(x)=\dfrac{1}{(9x^2-48x+62)^{11}}$ 的定義域為 $\{x\in R \mid 3x-8\neq\pm\sqrt{2}\}$ 。因為 $f(x)=\dfrac{1}{[(3x-8)^2-2]^{11}}$ ，由定理 1 得到 $f(x)$ 的 13 階導函數

$f^{(13)}(x)$

$$=2\cdot(-3)^{13}\cdot\sum_{k=0}^{6}\binom{13}{k}\frac{[11]_{13-k}[11]_k\cdot\sum_{p=0}^{6-k}\binom{13-2k}{2p}2^p\cdot(3x-8)^{13-2k-2p}}{[(3x-8)^2-2]^{24-k}} \qquad (7)$$

，對所有 $x\neq\dfrac{1}{3}(8\pm\sqrt{2})$ 。

所以我們得到 $f(x)$ 在 $x=-\dfrac{7}{4}$ 的 13 階微分值

$f^{(13)}\left(-\dfrac{7}{4}\right)$

$$=2\cdot(-3)^{13}\cdot\sum_{k=0}^{6}\binom{13}{k}\frac{[11]_{13-k}[11]_k\cdot\sum_{p=0}^{6-k}\binom{13-2k}{2p}2^p\left(-\frac{53}{4}\right)^{13-2k-2p}}{\left(\frac{2777}{16}\right)^{24-k}} \qquad (8)$$

我們用 Maple 算出 $f^{(13)}\left(-\dfrac{7}{4}\right)$ 的近似值為 $6.65162356726058386832423 7\times10^{-15}$

以及(8)式的近似值為 $6.651623567260583868324232\times10^{-15}$ ，兩者的近似值可以說非常接近。

另一方面，由定理 1 也可以得到 $f(x)$ 的 8 階導函數

$f^{(8)}(x)$

$$=2\cdot(-3)^{8}\cdot\sum_{k=0}^{3}\binom{8}{k}\frac{[11]_{8-k}[11]_k\cdot\sum_{p=0}^{4-k}\binom{8-2k}{2p}2^p\cdot(3x-8)^{8-2k-2p}}{[(3x-8)^2-2]^{19-k}}$$

$$+(-3)^8\cdot\binom{8}{4}([11]_4)^2\cdot\frac{1}{[(3x-8)^2-2]^{15}} \qquad (9)$$

，對所有 $x \neq \frac{1}{3}(8 \pm \sqrt{2})$ 。

所以 $f(x)$ 在 $x = \frac{10}{3}$ 的 8 階微分值

$$f^{(8)}\left(\frac{10}{3}\right)$$

$$= 2 \cdot (-3)^8 \cdot \sum_{k=0}^{3} \binom{8}{k} \frac{[11]_{8-k}[11]_k \cdot \sum_{p=0}^{4-k} \binom{8-2k}{2p} 2^p \cdot 2^{8-2k-2p}}{2^{19-k}}$$

$$+ (-3)^8 \cdot \binom{8}{4} ([11]_4)^2 \cdot \frac{1}{2^{15}} \qquad (10)$$

我們利用Maple得到 $f^{(8)}\left(\frac{10}{3}\right)$ 的近似值為 $9.4438846281076171875 \times 10^{11}$ 以及 (10)式的近似值為 $9.44388462810761718750000 1585 \times 10^{11}$，兩者的近似值非常接近。以下我們研究另外一種有理函數的微分問題：

例題 2： 設有理函數 $g(x) = \frac{1}{(4x^2+4x+2)^7}$ 的定義域為 $(-\infty, \infty)$。因為 $g(x) = \frac{1}{[(2x+1)^2+1]^7}$ ，所以利用定理 2 可以得到 $g(x)$ 的 10 階導函數

$$g^{(10)}(x)$$

$$= 2048 \cdot \sum_{k=0}^{4} \binom{10}{k} [7]_{10-k}[7]_k \cdot \frac{\sum_{p=0}^{5-k} \binom{10-2k}{2p} (-1)^p (2x+1)^{10-2k-2p}}{[(2x+1)^2+1]^{17-k}}$$

$$+ 1024 \cdot \binom{10}{5} ([7]_5)^2 \cdot \frac{1}{[(2x+1)^2+1]^{12}} \qquad (11)$$

，對所有 $x \in (-\infty, \infty)$ 。

因此我們可以求出 $g(x)$ 在 $x = \frac{1}{2}$ 的 10 階微分值

$$g^{(10)}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= 2048 \cdot \sum_{k=0}^{4}\binom{10}{k}[7]_{10-k}[7]_k \frac{\sum_{p=0}^{5-k}\binom{10-2k}{2p}(-1)^p \cdot 2^{10-2k-2p}}{5^{17-k}}$$

$$+ 1024 \cdot \binom{10}{5}([7]_5)^2 \cdot \frac{1}{5^{12}} \qquad (12)$$

由Maple得到$g^{(10)}\left(\frac{1}{2}\right)$和(12)式的近似值同樣為 $2.2506005083720903557 12\times 10^6$

。另一方面，利用定理2也可以求出$g(x)$ 的15階導函數

$$g^{(15)}(x)$$

$$= -65536 \cdot \sum_{k=0}^{7}\binom{15}{k}[7]_{15-k}[7]_k \frac{\sum_{p=0}^{7-k}\binom{15-2k}{2p}(-1)^p(2x+1)^{15-2k-2p}}{[(2x+1)^2+1]^{22-k}}$$

(13)

，對所有$x\in(-\infty,\infty)$ 。

所以$g(x)$ 在 $x=-\sqrt{3}$ 的 15 階微分值

$$g^{(15)}(-\sqrt{3})$$

$$= -65536 \cdot \sum_{k=0}^{7}\binom{15}{k}[7]_{15-k}[7]_k \frac{\sum_{p=0}^{7-k}\binom{15-2k}{2p}(-1)^p(-2\sqrt{3}+1)^{15-2k-2p}}{(14-4\sqrt{3})^{22-k}}$$

(14)

由 Maple 算出$g^{(15)}(-\sqrt{3})$ 的近似值為 $5.363704260550652085897862 60129\times 10^{10}$

以及(14)式的近似值為 $5.36370426055065208589786 26101\times 10^{10} - 0.\mathrm{I}$。Maple 得

到的答案中出現了虛數 I $(=\sqrt{-1}\,)$，是因為 Maple 用自己內建的特殊函數計算的結果，由於虛數部分為 0，所以是可以忽略的。

肆、結論

由上面兩個例子可以知道定理1和定理2是解決本文所研究的兩種有理函數微分問題的主要理論依據，並且我們看到Leibniz微分法則在我們理論推導中佔有舉足輕重的地位。事實上這個性質的應用極為廣泛，許多困難的問題利用它都可以迎刃而解，我們會陸續發表這方面的論文。未來我們會繼續利用Maple作為輔助解題的工具來研究其他微積分、高等微積分和工程數學的問題。

參考文獻

余啟輝 (2012a, 11 月)。Maple 的應用－以兩種函數的導函數閉合型式解求法為例子。*WCE 2012 民生電子研討會*，P0082，雲林縣：國立虎尾科技大學。

余啟輝 (2012b, 10 月)。Maple 的應用—以有理函數的微分問題為例子。*2012 光電與通訊工程研討會*，271-274 頁，高雄市：國立高雄應用科技大學。

余啟輝 (2012c, 9 月)。傅利葉級數在三角函數微分問題上的應用。*遠東學報*，*第二十九卷* (第三期)，271-279 頁。

余啟輝 (2012d, 8 月)。Maple 的應用－以兩種特別函數的微分問題為例子。*MC2012 第十七屆行動計算研討會*，ID17，新北市：長庚大學。

余啟輝 (2012e, 8 月)。Maple 的應用－以求解某種類型有理函數的高階微分值為例子。*DLT2012 數位生活科技研討會*，150-153 頁，雲林縣：國立雲林科技大學。

余啟輝 (2012f, 6 月)。Maple 在兩種函數的高階微分值求解問題上的應用。*DTIM2012 數位科技與創新管理研討會*，A46，新北市：華梵大學。

余啟輝 (2012g, 6 月)。Maple 在微分問題上的應用。*2012 第六屆創新管理學術與實務研討會*，桃園縣：萬能科技大學。

余啟輝 (2012h, 6 月)。Maple 在雙曲函數微分問題上的應用。*ICSSMET 2012 安全管理與工程技術國際研討會*，481-484 頁，嘉義縣：吳鳳科技大學。

余啟輝 (2012i, 6 月)。Maple 的應用－以三角函數的高階微分值求解問題為例子。*ICSSMET2012 安全管理工程技術國際研討會*，469-473 頁，嘉義縣：吳鳳科技大學。

余啟輝 (2012j, 5 月)。Maple 在求函數高階微分值問題上的應用。*ICIM2012 第 23 屆國際資訊管理學術研討會*，MS0287，高雄市：國立高雄大學。

余啟輝 (2012k, 3 月)。Maple 的應用—以一些周期函數的微分問題為例子。*IETAC 2012 第五屆資訊教育與科技應用研討會*，D3：11-16 頁，台中市：中台科技大學。

余啟輝 (2012l, 3 月)。Maple 的應用－以正弦和餘弦函數的微分問題為例子。*屏東台東澎湖地區大專校院第五屆通識教育聯合學術通識課程發展學術研討會*，197-207 頁，屏東縣：永達技術學院。

高木貞治(原著)，葉能哲、賴漢卿(合譯) (1984)，高等微積分(解析概論)，台北市：文笙書局。

Apostol, T. M. (1975). *Mathematical analysis* (2nd ed.). Massachusetts：Addison -Wesley Publishing Co., Inc.

Azarian, M. K. (1993). There may be more than one way to find the derivative of a function. *Missouri Journal of Mathematical Sciences, 5*(1), pp. 13-15.

Edwards, C. H. Jr. & Penney, D. E. (1986). *Calculus and analytic geometry* (2nd ed.).

New Jersey：Prentice-Hall, Inc.

Euler, R. (1997). A note on Taylor's series for sin(ax+b) and cos(ax+b). *The College Mathematics Journal, 28*(4), pp. 297-298.

Grossman, S. I. (1992). *Calculus* (5th ed.). London：Saunders College Publishing.

Larson, R., Hostetler, R. P. & Edwards, B. H. (2006). *Calculus with analytic geometry* (8th ed.). Boston：Houghton Mifflin.

Marshall, A. (2000). Math bite: once in a while, differentiation is multiplicative. *Mathematics Magazine*, p302.

The Differential Problem of Two Types of Rational Functions

Chii-Huei Yu*

Abstract

This paper mainly studies the differential problem of two types of rationalfunctions. We can obtain the closed forms of any order derivatives of these two types of rational functions by using Leibniz differential rule, and hence reducing the difficulty of evaluating their higher order derivative values greatly. In addition, we propose two examples of rational functions to find the closed forms of their any order derivatives and calculate some of their higher order derivative values practically. On the other hand, we employ the mathematical software Maple to calculate the approximations of these higher order derivative values and their solutions.

Key words: rational functions, Leibniz differential rule, closed forms, Maple

* Assistant Professor, Center of General Education, Nan Jeon Institute of Technology